

Mines, Epreuve 0 de probas : corrigé

1 Fonction caractéristique

1°)

◇ D'après la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X = n) : \text{c'est valable car } |e^{itn} P(X = n)| = P(X = n), \text{ or}$$

la série $\sum P(X = n)$ est convergente (de somme 1), donc la famille $(e^{itn} P(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, donc e^{itX} est d'espérance finie et la formule de transfert s'applique bien. En toute rigueur, le programme officiel définit l'espérance d'une variable aléatoire uniquement lorsque X est à valeurs réelles. On peut vérifier que toutes les propriétés du cours sur l'espérance sont encore valables pour des variable aléatoire à valeurs complexes, ou bien on définit Φ_X par : $\Phi_X(t) = E(\cos tX) + iE(\sin tX)$. On peut appliquer la formule de transfert pour chacun des deux termes et en déduire à nouveau que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X = n).$$

◇ Alors, clairement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t + 2\pi) = \Phi_X(t)$, donc Φ_X est 2π -périodique.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |e^{itn} P(X = n)| = P(X = n)$, or $\sum P(X = n)$ converge,

donc la série d'applications $\sum_n (t \mapsto e^{itn} P(X = n))$ converge normalement, donc

uniformément sur $\mathbb{R}$, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto e^{itn} P(X = n)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de continuité d'une série d'applications, Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $k \in \mathbb{N}$. $2\pi I_k = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{it(n-k)} P(X = n) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$, en posant

$f_n(t) = e^{it(n-k)} P(X = n)$. Comme ci-dessus, on montre que $\sum f_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$ et les applications f_n sont continues, donc d'après un théorème

d'interversion entre $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int$ à base de convergence uniforme, $2\pi I_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt$.

Or, lorsque $n \neq k$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} P(X = n) dt = P(X = n) \left[\frac{e^{i(n-k)t}}{i(n-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

et pour $k = n$, $\int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) dt = 2\pi P(X = k)$.

On en déduit que $I_k = P(X = k)$.

Si maintenant $\Phi_X = \Phi_Y$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_X(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_Y(t) e^{-ikt} dt = P(Y = k), \text{ donc } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}$$

$$3^\circ) \quad \Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t), \text{ avec } g_n(t) = e^{itn} P(X = n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g'_n(t) = in e^{itn} P(X = n)$.

On sait déjà que $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

$\sup_{t \in \mathbb{R}} |g'_n(t)| = n P(X = n)$ et $\sum n P(X = n)$ est sommable car X est supposée d'espérance finie, donc $\sum g'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une série d'applications : Φ_X est

$$\text{de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}, \Phi'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} in e^{itn} P(X = n).$$

$$\text{En particulier, } \Phi'_X(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} in P(X = n), \text{ donc } \Phi'_X(0) = iE(X).$$

4°) Pour une loi géométrique, $p \in]0, 1[$.

$$\Phi_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(Y = n - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{itn} (1 - p)^{n-2} p,$$

$$\text{donc } \Phi_Z(t) = \frac{p}{(1 - p)^2} e^{2it} (1 - p)^2 \frac{1}{1 - e^{it}(1 - p)},$$

car $1 - e^{it}(1 - p) \neq 0$ (en effet, $|(1 - p)e^{it}| = 1 - p \neq 1$).

$$\text{Ainsi, } \Phi_Z(t) = \frac{pe^{2it}}{1 - e^{it}(1 - p)}.$$

2 Remarques préliminaires

5°) On suppose qu'à l'instant 0 la file d'attente est vide, ainsi $X_0 = 0$ constitue bien le nombre de clients dans le système à l'instant 0.

Pour la cohérence de l'énoncé, il faut considérer que lorsque la file est vide, le serveur "traite un client fictif".

On peut alors établir la propriété par récurrence sur n :

Pour $n = 0$, c'est clair d'après nos conventions : le 0ième client est fictif.

Pour $n \geq 0$, supposons que X_n est égal au nombre de clients dans le système au moment du départ du client n .

Lorsque $X_n > 0$, à l'instant $n + 1$, le serveur gère un client qui est enlevé de la file d'attente, mais pendant le service de ce $(n + 1)$ -ième client, A_{n+1} clients entrent dans la file d'attente, donc le nombre de clients dans la file d'attente au moment du départ du $(n + 1)$ -ième client est égal à $X_n - 1 + A_{n+1} = X_{n+1}$.

Lorsque $X_n = 0$, le $(n + 1)$ -ième client est fictif car la file après le service du n -ième client est vide. Alors le nombre de clients dans la file au moment du départ du client $n + 1$, fictif, est égal à $A_{n+1} = X_{n+1}$.

6°) $X_0 = 0$, donc $X_1 = A_1$.

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$: notons $N = E(M) + 1$ (où E désigne la partie entière).

$P(X_1 \leq M) \leq P(X_1 \leq N) = 1 - P(X_1 > N) = 1 - P(A \geq N + 1) < 1$ d'après les hypothèses de l'énoncé.

Ainsi il n'existe aucun $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $P(X_n \leq M) = 1$.

7°) Soit $n \geq 1$. Notons Ω l'univers sur lequel sont définies nos variables aléatoires. Soit $\omega \in \Omega$.

Si $X_n(\omega) = 0$, $(X_{n+1} - X_n)(\omega) = A_{n+1}(\omega) \geq 0$,

et sinon $(X_{n+1} - X_n)(\omega) = -1 + A_{n+1}(\omega) \geq -1$,

donc $X_{n+1} - X_n \geq -1$.

8°) Par définition de X_n , $X_{n+1} = f(A_{n+1}, X_n)$, où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y - 1 + x & \text{si } y \neq 0 \end{cases}.$$

Par récurrence sur n , on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $X_n = f_n(A_n, \dots, A_1)$.

Or par hypothèse, A_{n+1} est indépendante de la variable aléatoire $(A_n, \dots, A_1)$, donc de X_n .

3 Convergence

9°) D'après la formule de transfert,

$$E(e^{itX} 1_{X>0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} 1_{n>0} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{itn} P(X = n) = \Phi_X(t) - P(X = 0).$$

10°)

$\Phi_{X_{n+1}}(t) = E(e^{itX_{n+1}}) = E(e^{itX_{n+1}}(1_{X_n=0} + 1_{X_n \neq 0})) = E(e^{itX_{n+1}} 1_{X_n=0}) + E(e^{itX_{n+1}} 1_{X_n \neq 0})$

d'après la linéarité de l'espérance. Or, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(e^{itX_{n+1}} 1_{X_n=0})(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n(\omega) \neq 0 \\ e^{itA_{n+1}(\omega)} & \text{si } X_n(\omega) = 0 \end{cases} = (e^{itA_{n+1}} 1_{X_n=0})(\omega)$$

et de même, $e^{itX_{n+1}} 1_{X_n \neq 0} = e^{it(X_n - 1 + A_{n+1})} 1_{X_n > 0}$,

donc $\Phi_{X_{n+1}}(t) = E(e^{itA_{n+1}} 1_{X_n=0}) + E(e^{it(X_n - 1 + A_{n+1})} 1_{X_n > 0})$.

Mais A_{n+1} et X_n sont indépendantes,

donc $E(e^{itA_{n+1}} 1_{X_n=0}) = E(e^{itA_{n+1}})E(1_{X_n=0}) = E(e^{itA_{n+1}})P(X_n = 0)$ et pour les mêmes

raisons, $E(e^{it(X_n - 1 + A_{n+1})} 1_{X_n > 0}) = E(e^{-it} e^{itX_n} e^{itA_{n+1}} 1_{X_n > 0}) = e^{-it} E(e^{itA_{n+1}})E(e^{itX_n} 1_{X_n > 0})$.

Alors, d'après la question précédente,

$\Phi_{X_{n+1}}(t) = \Phi_A(t)P(X_n = 0) + e^{-it}\Phi_A(t)(\Phi_{X_n}(t) - P(X_n = 0))$, ce qui donne bien

$$\Phi_{X_{n+1}}(t) = \Phi_A(t)(e^{-it}\Phi_{X_n}(t) + (1 - e^{-it})P(X_n = 0)).$$

11°)

◇ Remarquons que l'application θ est correctement définie, car pour $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, d'après les hypothèses, $|\Phi_A(t)e^{-it}| < 1$, donc $\Phi_A(t)e^{-it} \neq 1$.

◇ Par hypothèse, A est d'espérance finie, donc d'après la question 3, Φ_A est dérivable en 0 avec $\Phi_A(0) = iE(A) = i\rho$. Alors Φ possède au voisinage de 0 le développement limité suivant : $\Phi(t) = \Phi(0) + t\Phi'(0) + o(t) = 1 + it\rho + o(t)$.

12°) Pour t au voisinage de 0,

$\Phi_A(t)e^{-it} = (1 + it\rho + o(t))(1 - it + o(t)) = 1 + i(\rho - 1)t + o(t)$, et $1 - e^{-it} = it + o(t)$, donc lorsque t tend vers 0, $\theta(t) \sim \frac{it\alpha}{it(1 - \rho)} = \frac{\alpha}{1 - \rho}$.

L'application θ est donc continue en 0 si et seulement si $1 = \frac{\alpha}{1 - \rho}$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = 1 - \rho$.

13°) Soit $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. D'après la question 10,

$$\begin{aligned} |\Phi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t)| &= |\Phi_A(t)| |e^{-it}\Phi_{X_n}(t) + (1 - e^{-it})P(X_n = 0) - \alpha \frac{1 - e^{-it}}{1 - \Phi_A(t)e^{-it}}| \\ &= |\Phi_A(t)| |e^{-it}\Phi_{X_n}(t) - e^{-it}\alpha \frac{\Phi_A(t)(1 - e^{-it})}{1 - \Phi_A(t)e^{-it}} \\ &\quad + (1 - e^{-it})P(X_n = 0) + \frac{\alpha}{1 - \Phi_A(t)e^{-it}}(\Phi_A(t)e^{-it}(1 - e^{-it}) - (1 - e^{-it}))| \\ &\leq |\Phi_A(t)| \left(|\Phi_{X_n}(t) - \theta(t)| + |(1 - e^{-it})P(X_n = 0) - \alpha(1 - e^{-it})| \right). \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $|\Phi_A(t)| \in [0, 1[$, donc on peut poser $\beta_t = |\Phi_A(t)|$.

De plus $P(X_n = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$, donc, pour t fixé,

$|\Phi_A(t)| \cdot |(1 - e^{-it})P(X_n = 0) - \alpha(1 - e^{-it})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|\Phi_A(t)| \cdot |(1 - e^{-it})P(X_n = 0) - \alpha(1 - e^{-it})| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|\Phi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t)| \leq \beta_t |\Phi_{X_n}(t) - \theta(t)| + \varepsilon$.

14°) Par récurrence sur n , on en déduit que, pour tout $n \geq N$,

$$|\Phi_{X_n}(t) - \theta(t)| \leq \beta_t^{n-N} |\Phi_{X_N}(t) - \theta(t)| + \sum_{k=0}^{n-N-1} \varepsilon \beta_t^k \leq \beta_t^{n-N} |\Phi_{X_N}(t) - \theta(t)| + \varepsilon \frac{1}{1 - \beta_t}.$$

Or $\beta_t \in [0, 1[$, donc $\beta_t^{n-N} |\Phi_{X_N}(t) - \theta(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N'$, $\beta_t^{n-N} |\Phi_{X_N}(t) - \theta(t)| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $n \geq \max(N, N')$, $|\Phi_{X_n}(t) - \theta(t)| \leq \varepsilon \frac{2 - \beta_t}{1 - \beta_t}$, ce qu'il fallait démontrer,

qui à remplacer le ε de départ par $\varepsilon \frac{1 - \beta_t}{2 - \beta_t}$.

4 Application

15°) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_A(t) = \frac{1}{1 + \rho} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{1 + \rho} e^{it}}, \text{ or } \left| \frac{\rho}{1 + \rho} e^{it} \right| = \frac{\rho}{1 + \rho} < 1,$$

donc $\Phi_A(t) = \frac{1}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^n e^{int}$, donc d'après la deuxième question, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $P(A = n) = \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^n = \frac{1}{1 + \rho} \left(1 - \frac{1}{1 + \rho} \right)^n = P(A + 1 = n + 1)$. Ainsi

$A + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{1 + \rho}$.

16°) A est donc bien à valeurs entières et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A \geq n) \geq P(A = n) > 0$.

$E(A) = E(A+1) - 1 = (1+\rho) - 1$, d'après le cours sur la loi géométrique, donc on a bien $E(A) = \rho$.

Il reste à montrer que A est bien arithmétique : soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} |1 + \rho - \rho e^{it}|^2 &= (1 + \rho - \rho \cos t)^2 + \rho^2 \sin^2 t \\ &= 1 + \rho^2 + \rho^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 2\rho - 2\rho \cos t - 2\rho^2 \cos t, \end{aligned}$$

or $\cos t < 1$, donc $|1 + \rho - \rho e^{it}|^2 > 1 + 2\rho^2 + 2\rho - 2\rho - 2\rho^2 = 1$. Ainsi $|\Phi_A(t)| < 1$.

17°)

◇ Soit $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Alors

$$\theta(t) = \alpha \frac{\frac{1-e^{-it}}{1+\rho-\rho e^{it}}}{1 - \frac{e^{-it}}{1+\rho-\rho e^{it}}} = \alpha \frac{1 - e^{-it}}{1 + \rho - \rho e^{it} - e^{-it}} = \frac{\alpha}{1 - \rho e^{it}}.$$

◇ En particulier, θ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 2,

$$2\pi P(X_n = k) = \int_{[-\pi, 0[} \Phi_{X_n}(t) e^{-ikt} dt + \int_{]0, \pi]} \Phi_{X_n}(t) e^{-ikt} dt, \text{ mais } \Phi_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}}_{]0, \pi]} \theta \text{ d'après}$$

la question 14, Φ_{X_n} et θ sont continues sur $]0, \pi]$, et, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times]0, \pi]$, $|\Phi_{X_n}(t) e^{-ikt}| \leq 1 = \varphi(t) : \varphi$ est intégrable sur $]0, \pi]$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée : $\int_{]0, \pi]} \Phi_{X_n}(t) e^{-ikt} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{]0, \pi]} \theta(t) e^{-ikt} dt$. De même,

$$\int_{]-\pi, 0]} \Phi_{X_n}(t) e^{-ikt} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{]-\pi, 0]} \theta(t) e^{-ikt} dt, \text{ donc } P(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(t) e^{-ikt} dt.$$

Mais, pour $t \neq 0$, $\theta(t) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{ikt}$, donc d'après le calcul fait en question 2,

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \rho^k.$$

◇ Si l'on admet (?) que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y , alors pour

tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \alpha \rho^k$. Mais dans ce cas, $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = \alpha \frac{1}{1 - \rho}$, donc

$$\alpha = 1 - \rho.$$

Alors $P(Y+1 = k+1) = (1 - \rho) \rho^k$, donc $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \rho$.