EPREUVE OPTIONNELLE de MATHEMATIQUES
CORRIGE

Partie I

1. $\varphi : (x, t) \;\alpha\; (X = x + v\,t,\ T = x - v\,t)$ est un C^2 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ car :

- φ est bijective, l'application réciproque $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ étant définie par :

$\varphi^{-1}(X, T) = \left(\dfrac{X+T}{2}, \dfrac{X-T}{2v}\right)$ pour tout couple (X, T) de $\mathbb{R}^2$.

- φ et φ^{-1} admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2, définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.

2. <u>Etude d'une équation aux dérivées partielles équivalentes à (CV)</u>

a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial X}(x+vt, x-vt) + \dfrac{\partial U}{\partial T}(x+vt, x-vt) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = v\dfrac{\partial U}{\partial X}(x+vt, x-vt) - v\dfrac{\partial U}{\partial T}(x+vt, x-vt) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2}(x+vt, x-vt) + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(x+vt, x-vt) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial T^2}(x+vt, x-vt) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2}(x+vt, x-vt) - 2v^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(x+vt, x-vt) + v^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial T^2}(x+vt, x-vt) \end{cases}$$

b) On en déduit que u satisfait l'équation (CV) si et seulement si U satisfait l'équation (E) suivante :

$$\forall (X, T) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X, T) = 0.$$

3. <u>Résolution d'une équation aux dérivées partielles à (CV)</u>

a) U est solution de (E) si et seulement si $\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right) = 0$ équivaut à dire que la fonction $\dfrac{\partial U}{\partial T}$ est constante par rapport à la variable X donc qu'elle ne dépend que de la variable T .Ainsi on obtient l'équivalence suivante :

U vérifie l'équation $\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $\forall (X, T) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial U}{\partial T}(X, T) = \alpha(T)$.

On a ensuite l'implication suivante :

$\forall\ (X, T) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial U}{\partial T}(X, T) = \alpha\,(T) \Rightarrow \forall\ (X, T) \in \mathbb{R}^2,\ U\,(X, T) = A\,(T) + B\,(X)$ où A désigne une primitive de α choisie arbitrairement et B une fonction de X de classe C^2 (constante par rapport à T). On remarque que A est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car α de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, on vérifie que toute fonction U telle qu'il existe deux fonctions A et B de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ (X, T) \in \mathbb{R}^2,\ U\,(X, T) = A\,(T) + B\,(X)$$

est de classe C^2 et solution de l'équation (E).

b) On déduit de ce qui précède que les solutions de l'équation (CV) sont les fonctions u définies par : $\forall\ (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ u\,(x, t) = A\,(x - v\,t) + B\,(x + v\,t)$ où $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

c) Déterminons A et B pour que u vérifie les conditions initiales données.

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ u\,(x, 0) = f\,(x) \Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ A\,(x) + B\,(x) = f\,(x) \Leftrightarrow A + B = f$;

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ -v\,A'(x) + v\,B'(x) = 0 \Leftrightarrow B' - A' = 0.$

La condition $B' - A' = 0$ équivaut à l'existence d'une constante K réelle telle que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ B\,(x) - A\,(x) = K\,.$$

Alors la condition $A + B = f$ donne : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ A\,(x) = \dfrac{f\,(x)}{2} - \dfrac{K}{2}$ et $B\,(x) = \dfrac{f\,(x)}{2} + \dfrac{K}{2}$.

En conclusion, on obtient une unique solution u de l'équation (CV) vérifiant les conditions initiales données : $\forall\ (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ u\,(x, t) = \dfrac{f\,(x - vt)}{2} + \dfrac{f\,(x + vt)}{2}$.

Partie II

4. <u>Existence d'une solution vérifiant les conditions données</u>

a) Montrons que la fonction f prolongée est de classe C^2

$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et telle que $f\,(0) = f\,(\pi) = 0$.

Dans ces conditions, la fonction peut être prolongée en une fonction impaire, 2π périodique et continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'en tout point de la forme $k\,\pi$ avec k entier relatif, f s'annule.

La fonction f ainsi prolongée est dérivable sur tout intervalle du type $]k\,\pi, (k+1)\,\pi[$.

Vérifions qu'elle est dérivable en 0 :

$\forall\ x \in [-\pi, 0],\ f\,(x) = -f\,(-x) \Rightarrow \forall\ x \in [-\pi, 0],\ f\,'(x) = f\,'(-x).$

On vérifie ainsi que :

$f_g'(0) = f_d'(0) = f\,'(0)$;

$f_g'(\pi) = f_d'(-\pi)$ (or $f_d'(-\pi) = f_d'(\pi)$ par 2π-périodicité) donc $f_g'(\pi) = f_d'(\pi)$.

Cela prouve que f est dérivable et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f\,'$ 2π-périodique) ; donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

De même pour la dérivée seconde :

$\forall\ x \in [-\pi, 0],\ f\,'(x) = f\,'(-x) \Rightarrow \forall\ x \in [-\pi, 0],\ f\,''(x) = -f\,''(-x).$

On en déduit $f_g''(0) = f_d''(0)$ car $f_d''(0) = 0$ et $f_g''(\pi) = f_d''(\pi)$ car $f_g''(\pi) = 0$.

Donc f est C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) D'après la question 3, la fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par : $u(x, t) = \dfrac{f(x - vt)}{2} + \dfrac{f(x + vt)}{2}$

est solution de l'équation (CV) sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie les conditions initiales [$u(x, 0) = f(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, pour tout x réel].

Par restriction à $[0, \pi] \times [0, +\infty[$, cette fonction est également solution de l'équation (CV) sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$, vérifiant de plus les conditions aux limites : ($u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, pour tout t réel ≥ 0) car f impaire et 2π-périodique.

On prouve ainsi l'existence d'une solution de (CV) sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ vérifiant les conditions initiales et les conditions aux limites.

5. Unicité d'une solution par considération de l'énergie

a) Montrons que la fonction E est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

- La fonction $h : (t, x) \;\alpha\; \dfrac{1}{v^2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]^2$ est continue sur $[0, +\infty[\times [0, \pi]$

- h admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial t}$: $(t, x) \;\alpha\; \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t)$ définie et continue sur $[0, +\infty[\times [0, \pi]$.

Sous ces hypothèses, puisqu'on intègre sur le segment $[0, \pi]$, on peut affirmer que la fonction $E : t \;\alpha\; \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \left(\dfrac{1}{v^2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]^2\right)dx$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et qu'on a, pour tout $t \geq 0$, $E'(t) = \displaystyle\int_0^\pi \left(\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t)\right)dx$.

b) Notons $g : x \;\alpha\; \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.

$$\text{Alors } g'(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t)$$

$$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t)$$ car u est solution de l'équation (CV).

On en déduit que pour tout $t \geq 0$:

$$E'(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)\frac{\partial u}{\partial t}(\pi,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\frac{\partial u}{\partial t}(0,t).$$

c) Or $u = u_2 - u_1$ est solution de (CV) vérifiant les conditions aux limites $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, pour tout $t \geq 0$.

On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\pi, t)$ pour tout réel $t \geq 0$; ainsi E' est nulle sur [0, +∞ [et E est constante sur [0, +∞ [.

On a donc : $\forall\, t \in [0, +\infty[$, $E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\right]^2\right)dx = 0$ compte tenu des conditions initiales $u(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ pour tout x de $[0, \pi]$.

$\forall\, t \in [0, +\infty[$, $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]^2\right)dx = 0$.

Pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $h_t : x \mapsto \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]^2$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ et à valeurs positives. Or son intégrale sur $[0, \pi]$ est nulle ; on en déduit donc que la fonction h_t est nulle, pour tout $t \geq 0$ et puisque c'est une somme de carrés sur $\mathbb{R}$, chaque terme de la somme est nul.

Ainsi, on a prouvé :

$\forall\, x \in [0, \pi]$, $\forall\, t \in [0, +\infty[$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$ c'est à dire la fonction u est constante par rapport à la variable t.

De même :

$\forall\, x \in [0, \pi]$, $\forall\, t \in [0, +\infty[$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$ c'est à dire la fonction u est constante par rapport à la variable x.

En conclusion, u est une fonction constante sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ et puisque $u(x, 0) = 0$ pour tout x de $[0, \pi]$, on conclut que u est nulle c'est à dire $u_1 = u_2$. On a ainsi prouvé l'unicité de la solution de (CV) sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$, vérifiant les conditions initiales et les conditions aux limites données.